

Свободные библиотеки интервальных
вычислений при подготовке
бакалавров и магистров направления
"Математика и компьютерные науки" в
Кубанском государственном
университете

Е. Р. Алексеев, к.т.н., доцент, КубГУ

С. В. Гончаров, магистрант, КубГУ

Почта: mr.stas.goncharov@mail.ru



Интервальный анализ в КубГУ

- Курс «Современные методы обработки числовых данных» для бакалавров направления подготовки 02.03.01 «Математика и компьютерные науки»
- Курс «Компьютерные технологии в науке и образовании» для магистрантов направления подготовки 02.04.01 «Математика и компьютерные науки»

Используемые программные средства интервальных вычислений

- Interval – пакет интервальных вычислений для Octave
<https://sourceforge.net/p/octave/interval/ci/default/tree/>
- Boost interval – библиотека интервалов на C++
<https://github.com/boostorg/interval>
- Libieeeer1788 – библиотека интервалов, реализующая интервальную арифметику стандарта IEEE 1788
<https://github.com/boostorg/interval>

Стандартные задачи

1 Найти скалярное произведение двух векторов

$$x = (10^{20}, 1213, 10^{18}, 10^{15}, 3, -10^{12})$$

$$y = (10^{20}, 2, -10^{22}, 10^{13}, 2111, 10^{16})$$

2 Вычислить значение функции Румпа

$$f = 333.75 b^6 + b^6 (11 a^2 b^2 - b^6 - 121 b^4 - 2) + 5.5 b^8 + \frac{a}{2b}$$

При $a = 77617$, $b = 33096$ $F = 0.82739605994682136814116509548$

3 Вычислить значение рациональной функции

$$f(x, y) = \frac{1}{y^6 - 3xy^5 + 5y^3y^3 - 3x^5y - x^6}$$

$$f(a_i, a_{i+1}) = (-1)^i \quad a_i, a_{i+1} \text{ - } i \text{ и } i+1 \text{ числа Фибоначчи}$$

Стандартные задачи

4 Вычислить значения выражений

$$f(x, y) = (x^2)^2 - (2y^2)^2 - 2y^2$$

$$g(x, y) = (x^2)^2 - (2y^2)^2(y^2 + 1)$$

при $x=665857$ и $y=470832$, $f(x, y) = g(x, y) = 1$

5 Вычислить значение выражения

$$f(x, y) = \frac{1}{107751} (1682xy^4 + 3x^3 + 29xy^2 - 2x^5 + 832)$$

при $x=192119201$, $y=35675640$, $f(x, y) = 1783$

6 Вычислить значение

$$f''(1), f(x) = \frac{540x^4 - 23x^3 + 159x^2 - 2x + 45}{x^3 + 18x^2 + 501x + 20}$$

$$f''(1) = 36$$

Примеры реальных задач

1 Нестационарная задача теплопроводности

$$\frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2}$$

$$(\tau > 0); 0 \leq x \leq \delta$$

$$t(x, 0) = t_0$$

$$\frac{\partial t(0, \tau)}{\partial x} = 0$$

$$t(\delta, \tau) = t_{\tilde{n}\tilde{o}}$$

2 Задача Ван-Дер-Поля

$$\frac{d y_1}{d t} = y_2$$

$$\frac{d y_2}{d t} = \mu(1 - y_1^2) y_2 - y_1$$

$$y_1(0) = 2$$

$$y_2(0) = 0$$

$$0 \leq t \leq T$$

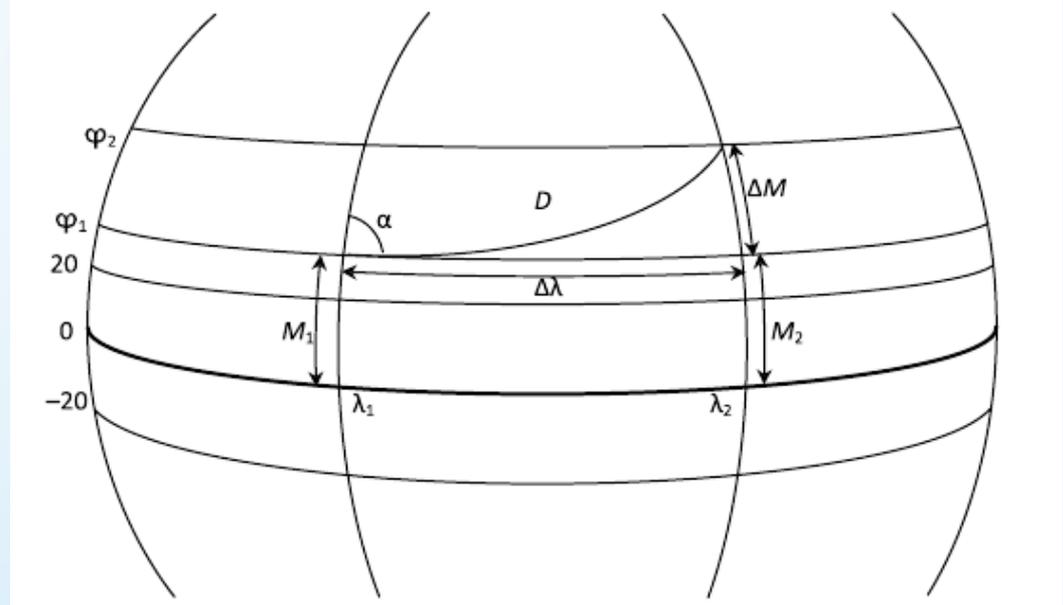
Примеры реальных задач

3 Прямая геодезическая задача:

- по заданной широте и долготе первой точки требуется найти географические координаты второй точки, если известны начальный азимут и расстояние между этими точками

4 Обратная задача

- найти расстояние между двумя заданными точками и азимут из первой точки на вторую



Примеры реальных задач

5 Жесткое дифференциальное уравнение первого порядка

$$\varepsilon y' + (1+t)y - t - 1 = 0$$

$$y(0) = 0; t \in (0, 2)$$

6 Дифференциальное уравнение

$$y' + y \tan(t) - 100t^2 \cos(t)^2 = 0$$

$$y(0) = 0; t \in (0, \frac{\pi}{2})$$

7 Краевая задача

$$\varepsilon y'' + x y' + y = 0$$

$$y(0) = 1$$

$$y(1) = \exp(-0.5 \varepsilon)$$

$$\varepsilon = 1/300$$

Lib_Interval_Math

Разработана библиотека, содержащая инструменты решения задач интервального анализа (Boost Interval)

Состав библиотеки

Функции:

- Простейшие матричные операции (сложение, вычитание, умножение матрицы на число, произведение матриц, транспонирование матриц, вычисление обратной матрицы), вычисление определителя матрицы
- Алгоритмы решения систем линейных алгебраических уравнений (метод Гауса, Жордана-Гауса, LU-разложение, QR-разложение)
- Алгоритмы решения нелинейных уравнений и систем (метод Ньютона)
- Алгоритмы решения дифференциальных уравнений первого и второго порядков (метод Эйлера, модифицированный метод Эйлера, метод Рунге-Кутты, метод Кутты-Мерсона)

Решение СЛАУ

$$\begin{cases} C_0 + 2C_1 + 2C_2 + 2C_3 + 2C_4 + 2C_5 + 2C_6 = 0 \\ C_1 + 4C_2 + 9C_3 + 16C_4 + 25C_5 + 36C_6 = 1 \\ C_1 + 16C_2 + 81C_3 + 256C_4 + 625C_5 + 1296C_6 = 0 \\ C_1 + 64C_2 + 729C_3 + 4096C_4 + 15625C_5 + 46656C_6 = 0 \\ C_1 + 256C_2 + 6561C_3 + 65536C_4 + 390625C_5 + 1679616C_6 = 0 \\ C_1 + 1024C_2 + 59049C_3 + 1048576C_4 + 9765625C_5 + 60466176C_6 = 0 \\ C_1 + 4096C_2 + 531441C_3 + 16777216C_4 + 244140625C_5 + 2176782336C_6 = 0 \end{cases}$$
$$C_0 = -\frac{5369}{1800}, C_1 = \frac{12}{7}, C_2 = -\frac{15}{56}, C_3 = \frac{10}{189}, C_4 = -\frac{1}{112}, C_5 = \frac{2}{1925}, C_6 = -\frac{1}{16632}$$

Решения полученные методами Жордана — Гаусса и LU-разложения

```
----Print Interval Vector----  
-2.98278 -2.98277  
 1.71428 1.71429  
-0.26786 -0.26786  
 0.05291 0.05291  
-0.00893 -0.00893  
 0.00104 0.00104  
-0.00006 -0.00006
```

```
----Print Interval Vector----  
-2.98297 -2.98259  
 1.71421 1.71436  
-0.26787 -0.26784  
 0.05291 0.05291  
-0.00893 -0.00893  
 0.00104 0.00104  
-0.00006 -0.00006
```

Решение задачи Коши

$$\begin{aligned}\varepsilon y' + (1+t)y - t - 1 &= 0 \\ y(0) &= 0; t \in (0, 2)\end{aligned}$$

Для $\varepsilon = 0.01$ наилучший результат выдал метод Рунге-Кутта на 150 промежутках разбиения

ИТОГИ

- Разработана библиотека решения задач на основе интервального анализа
- Набор инструментов позволит использовать библиотеку в решении моделей инженерных задач в образовательном процессе
- В результате изучения интервальных вычислений в рамках дисциплин «Современные методы обработки числовых данных» и «Компьютерные технологии в науке и образовании» студенты получают не только теоретические знания, но и смогут применить эти знания на практике при решении прикладных инженерных задач.



Благодарю за внимание!

Готов ответить на Ваши вопросы

