1. Введение

В работе рассматривается задача поиска и изучения минимальных существенных замкнутых классов в $P_k, k \geq 3$. Сформулирована и доказана теорема, описывающая некоторые такие классы в случае, когда порождающая функция принимает меньше k значений. Найдены и описаны все минимальные существенные замкнутые классы в P_3.

2. Основная часть

Определение. Переменная x_j функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$ называется *существенной*, если существует такой набор $b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_n, b_i', b_i'' \in E_k$, что

$$f(b_1, \ldots, b_i', \ldots, b_n) \neq f(b_1, \ldots, b_i'', \ldots, b_n).$$

В противном случае x_i называется *фиктивной* переменной.

Определение. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *существенной*, если она имеет больше одной существенной переменной.

Определение. Существенный замкнутый класс K будем называть *минимальным*,[1] если для любой существенной функции $f \in K$ верно $[f] = K$.

Исходя из определения, *м.с.з.к.* K можно задавать как замыкание любой существенной функции $f \in K$. В таком случае будем говорить, что f *порождает м.с.з.к.* K.

Лемма 2.1. *В любом существенном замкнутом классе в $P_k, k \geq 3$ содержится существенная функция существенно зависящая от $\leq k$ переменных.*

☐ Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда в некотором существенном замкнутом классе K в P_k все существенные функции имеют арность $> k$. Выберем в K существенную функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ минимальной арности. Отождествляя любые две переменные в f, получим либо константу, либо функцию существенно зависящую от одной переменной. В противном случае получим существенную функцию строго меньшей арности, что приводит к противоречию с выбором f.

Отождествим какие-то две переменные

$$f(x_1, \ldots, \underset{i}{x_i}, \ldots, \underset{j}{x_i}, \ldots, x_n).$$

Если полученная функция оказалась константой, то отождествление всех переменных обязано дать ту же константу. Если же получилась функция существенно зависящая от одной переменной, то отождествляя все переменные, мы так же получим функцию существенно зависящую от одной переменной. Стало быть, возможны два случая.

Отождествление любых двух переменных дает константу. То есть на всех наборах значений, в которых какие-то две переменные совпали, функция принимает одно и то же значение. Но какие-то две компоненты совпадают на любом элементе из E_k^n при $n > k$. Значит, $f \equiv c$, что приводит к противоречию, так как f — существенная.

Рассмотрим второй случай. Пусть отождествление переменных x_i и x_j даёт некоторую функцию, существенно зависящую только от одной переменной

$$f(x_1, \ldots, \underset{i}{x_i}, \ldots, \underset{j}{x_i}, \ldots, x_n) = \varphi_{ij}(x_l).$$

[1] Далее в тексте *минимальный существенный замкнутый класс* будем писать сокращенно — *м.с.з.к.*

Все переменные кроме x_l фиктивные, поэтому

$$\varphi_{ij}(x_l) = f(x_l, \ldots, x_l) = \varphi(x_l).$$

Необходимо доказать, что l не зависит от выбора i и j. Доказательство начнем со случая $n = 4$. Рассмотрим все возможные способы отождествить какие-то две переменные функции арности 4.

$f(x_1, x_1, x_3, x_4) = \varphi(x_{i_1})$
$f(x_1, x_2, x_1, x_4) = \varphi(x_{i_2})$
$f(x_1, x_2, x_3, x_1) = \varphi(x_{i_3})$
$f(x_1, x_2, x_2, x_4) = \varphi(x_{i_4})$
$f(x_1, x_2, x_3, x_2) = \varphi(x_{i_5})$
$f(x_1, x_2, x_3, x_3) = \varphi(x_{i_6})$

Предположим, что $i_1 \in \{1, 2\}$, тогда $i_2 \in \{1, 2\}$. Иначе, отождествив первые три переменные, получим функцию, существенно зависящую от одной из первых трех и от четвертой переменных одновременно. Аналогично рассуждая получаем $i_3, i_4, i_5 \in \{1, 2\}$. Отдельно необходимо рассмотреть i_6. Если $i_6 \in \{3, 4\}$, то отождествив все переменные получим с одной стороны $\varphi(x_1)$ или $\varphi(x_2)$, а с другой — $\varphi(x_3)$ или $\varphi(x_4)$. Стало быть, $i_6 \in \{1, 2\}$. В первом и втором равенстве отождествим первые три переменные. Получим одинаковую функцию, откуда следует, что $i_1 = i_2$. Отождествляя соответствующие переменные в других равенствах, в итоге получаем

$$\forall\, j, l : i_j = i_l.$$

Если же оказалось $i_1 \in \{3, 4\}$, то $i_6 \in \{3, 4\}$. И рассуждение можно повторить.

Теперь рассмотрим случай $n > 4$. Сначала докажем, что найдутся такие i и j, что отождествление x_i и x_j дает $\varphi(x_l)$, где $l \in \{i, j\}$. Для этого в первую половину переменных функции f подставим x, а во вторую — y. Должна получится либо функция $\varphi(x)$, либо $\varphi(y)$. Не теряя общности можно считать, что получилась функция $\varphi(x)$, тогда повторим этот процесс с первой половиной переменных. Процесс остановим либо, когда число переменных в рассматриваемой группе равно двум, и тогда все доказано, либо, когда их число равно трем. В последнем случае добавим еще одну переменную и применим к полученным четырем переменным рассуждение из случая $n = 4$, где доказано в частности, что должна встретиться искомая пара переменных.

Теперь, когда это доказано, остается рассмотреть все способы добавить к найденным x_i и x_j какие-нибудь две переменные и применить рассуждение из случая $n = 4$.

Итак, при $n > k$ имеем

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_l),$$

где l не зависит от i и j. Пришли к противоречию с тем, что f существенно зависит от всех своих переменных. ■

За P_k^n обозначим множество всех функций из P_k существенно зависящих не более, чем от n переменных.

Лемма 2.2. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$ порождает м.с.з.к. Тогда для любой существенной функции $g \in [f] \cap P_k^n$ верно*

$$[g] \cap P_k^n = [f] \cap P_k^n.$$

□ Если оказалось, что для некоторой $f_0 \in [f]$ имеет место $[f_0] \cap P_k^n \neq [f] \cap P_k^n$, то, очевидно, $[f_0] \neq [f]$. ■

Важно отметить, что обратное утверждение, вообще говоря, верно только в случае $n = k$. Докажем это.

Лемма 2.3. *Пусть дана функция $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k, n = k$. Если для любой существенной функции $g \in [f] \cap P_k^n$ выполнено*

$$[g] \cap P_k^n = [f] \cap P_k^n,$$

то f порождает м.с.з.к.

$\square$ В противном случае найдется такая существенная функция $f_0 \in [f]$, что $f \notin [f_0]$. По лемме 2.1 в $[f_0]$ содержится некоторая существенная функция f_1 арности $\leq k$. Так как по условию $n = k$, то $f_1 \in P_k^n$. Так же имеем

$$f_1 \in [f_0] \subset [f],$$

поэтому $f_1 \in [f] \cap P_k^n$. Отсюда, используя, что $[f_1] \cap P_k^n = [f] \cap P_k^n$, имеем

$$f \in [f_1] \cap P_k^n \subseteq [f_0].$$

Пришли к противоречию. $\blacksquare$

Итак, согласно лемме 2.1, задача поиска всех *м.с.з.к.* в $P_k, k \geq 3$ сводится к рассмотрению замыканий функций зависящих существенно не более, чем от k переменных, то есть к рассмотрению конечного числа функций. Утверждение леммы 2.2 в данной задаче является необходимым и может быть проверено за конечное время. Для этого сформулируем и решим пару подзадач.

Задача 2.1. *Найти алгоритм построения по заданной функции $h(x, y) \in P_k^2$ множества функций $[h] \cap P_k^2$.*

Удобно будет сначала явно предъявить алгоритм, а затем обосновать его и доказать некоторые свойства.

Пусть $h(x, y) \in P_k^2$ — функция из условия, а так же дана некоторая функция $f(x, y) \in P_k^2$ и множество $M \subset P_k^2$. Рассмотрим следующие формулы над $\{h, f\} \cup M$

1. $f(x, x)$
2. $f(y, x)$
3. $h(f(x, y), y)$
4. $h(x, f(x, y))$
5. Для каждой функции $g(x, y) \in M$ формула $h(f(x, y), g(x, y))$
6. Для каждой функции $g(x, y) \in M$ формула $h(g(x, y), f(x, y))$

Назовём данный набор формул набором $(*)$. Перейдём к описанию алгоритма.

Пусть сначала $M = \{h(x, y)\}$. Рассмотрим набор формул $(*)$, где в качестве функции f взята h. Если какие-то из формул реализуют функцию отличную от h, то добавим их в M. Далее для каждой из добавленных функций f составим набор формул $(*)$, где в качестве множества M берется подмножество функций M найденных не позже f. Если из последней добавленной функции применением набора $(*)$ новых функций не получается, тогда процесс считается завершенным.

Все функции из M попарно различны и принадлежат P_k^2. Число всех функций в P_k^2 конечно, откуда следует, что описанный процесс не может продолжаться бесконечно.

Определение. Определим функцию $\widetilde{l}$ на множестве формул над некоторой функцией f.

1. Если x — переменная, то $\widetilde{l}(x) = 0$,

2. если формула имеет вид $f(F_1, \ldots, F_n)$, то определим

$$\widetilde{l}(f(F_1, \ldots, F_n)) = \widetilde{l}(F_1) + \ldots + \widetilde{l}(F_n) + 1.$$

Значение $\widetilde{l}(F)$ называется *функциональной сложностью* формулы F.

Представленный алгоритм требуется обосновать. Для этого достаточно доказать следующее

Утверждение 2.4. *Множества M и $[h] \cap P_k^2$ совпадают.*

□ Заметим, что любая функция из M реализуется некоторой формулой с двумя переменными из набора (*) над функциями из M и никак иначе. Поскольку изначально в M находится только $h(x,y)$, получаем, что все функции из M реализуются формулами с двумя переменными над $h(x,y)$. Отсюда имеем

$$M \subseteq [h] \cap P_k^2.$$

Предположим, что в $[h] \cap P_k^2$ существуют функции не лежащие в M. Выберем среди них функцию f_0 с минимальной функциональной сложностью. Рассмотрим формулу F_0 над h, которой реализуется функция f_0. Формула имеет вид

$$F_0 = h(F_1, F_2),$$

где $F_i, i = 1, 2$ либо формула над h, либо переменная x или y. Рассмотрим то, какими могут оказаться F_i.

Случай первый. Пусть F_1 и F_2 — переменные. Очевидно f_0 не могла оказаться равной $h(x,y)$. Если f_0 равна $h(x,x)$ или $h(y,x)$, то f_0 реализуется формулой из набора $(*)$ над h, что тоже приводит к противоречию. Остается последний вариант — $f_0(x,y) = h(y,y)$. Но это означает, что $h(y,x)$, из которой f_0 реализует формулой набора $(*)$, так же не принадлежит M. Снова приходим к противоречию.

Случай второй. F_1 — формула над h, а F_2 — переменная x или y. Если $F_2 = y$, то функция, которая реализуется формулой F_1, так же не лежит в M. Потому что F_0 получается из F_1 формулой из набора $(*)$. Но $\widetilde{l}(F_1) < \widetilde{l}(F_0)$, откуда приходим к противоречию. Если оказалось $F_2 = x$, то $F_0(y,x) \notin M$ и рассуждение сводится к предыдущему.

Случай третий. Наоборот, F_1 — переменная, а F_2 — формула над h. В этом случае рассуждение проводится абсолютно аналогично предыдущему случаю.

Наконец, четвертый случай. F_1 и F_2 — формулы над h. $\widetilde{l}(F_1) < \widetilde{l}(F_0)$ и $\widetilde{l}(F_2) < \widetilde{l}(F_0)$, поэтому $F_1, F_2 \in M$, но тогда f_0 реализуется формулой из набора $(*)$. Снова приходим к противоречию и утверждение доказано. ■

Сформулируем аналогичную задачу для случая арности 3.

Задача 2.2. *Найти алгоритм построения по заданной функции $h(x,y,z) \in P_k^3$ множества функций $[h] \cap P_k^3$.*

Зададим соответствующий набор формул $(*)$. Пусть $h(x,y,z) \in P_k^3$ — функция из условия, а так же дана некоторая функция $f(x,y,z) \in P_k^3$ и множество $M \subset P_k^3$. Рассмотрим следующие формулы над $\{h, f\} \cup M$

1. $f(x,x,z)$
2. $f(y,x,z)$
3. $h(f(x,y,z),y,z)$
4. $h(x,f(x,y,z),z)$
5. $h(x,y,f(x,y,z))$
6. Для каждой функции $g(x,y,z) \in M$ формула $h(f(x,y,z), g(x,y,z), z)$
7. Для каждой функции $g(x,y,z) \in M$ формула $h(f(x,y,z), y, g(x,y,z))$

8. Для каждой пары функций $g_1(x,y,z), g_2(x,y,z) \in M$ формула $h(f(x,y,z), g_1(x,y,z), g_2(x,y,z))$

Доказательство проводится аналогично задаче **??** индукцией по функциональной сложности формулы над $h(x,y,z)$.

В задаче поиска *м.с.з.к.* замыкание иногда можно не досчитывать до конца, отбрасывая рассматриваемую функцию как заведомо не порождающую *м.с.з.к.*

Лемма 2.5. *Пусть $f \in P_k$. Обозначим через $B_f \subseteq E_k$ — множество всех значений, которые принимает функция f. Если найдется существенная функция $g \in [f]$ такая, что $B_g \subset B_f$, то f не может порождать м.с.з.к.*

□ Очевидно, для любой функции $h \in [g]$ имеем $B_h \subseteq B_g$. Но из условия следует, что $B_f \not\subseteq B_g$. Значит $f \notin [g]$. ■

Если две функции получаются друг из друга перестановкой элементов в их табличном представлении, то достаточно проверить лишь одну из них.

Определение. Пусть $f \sim g$ означает, что существует такая перестановка π на множестве E_k, что

$$g(x_1,\ldots,x_n) = \pi^{-1}(f(\pi(x_1),\ldots,\pi(x_n))).$$

Утверждение 2.6. *Отношение $\sim$ — есть отношение эквивалентности на множестве P_k.*

□ Рефлексивность: $\forall f \in P_k : f \sim f$, где в качестве π взята тождественная перестановка.

Симметричность: $\forall f, g \in P_k : f \sim g \Rightarrow g \sim f$. Пусть имеет место

$$g(x_1,\ldots,x_n) = \pi^{-1}(f(\pi(x_1),\ldots,\pi(x_n))).$$

Подставим $\pi^{-1}(x_i)$ вместо x_i и применим π к обеим частям равенства

$$\pi(g(\pi^{-1}(x_1),\ldots,\pi^{-1}(x_n))) = f(x_1,\ldots,x_n).$$

Обозначив π^{-1} как π_0 получаем

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \pi_0^{-1}(g(\pi_0(x_1),\ldots,\pi_0(x_n))).$$

Транзитивность: $\forall f, g, h \in P_k : f \sim g, g \sim h \Rightarrow f \sim h$. Пусть

$$g(x_1,\ldots,x_n) = \pi_1^{-1}(f(\pi_1(x_1),\ldots,\pi_1(x_n))).$$

$$h(x_1,\ldots,x_n) = \pi_2^{-1}(g(\pi_2(x_1),\ldots,\pi_2(x_n))).$$

Подставим первое равенство во второе и получим

$$h(x_1,\ldots,x_n) = \pi_2^{-1}\pi_1^{-1}(f(\pi_1\pi_2(x_1),\ldots,\pi_1\pi_2(x_n))).$$

■

Лемма 2.7. *Если имеет место $f \sim g$, то f порождает м.с.з.к. тогда и только тогда, когда g порождает м.с.з.к.*

□ Достаточно доказать, что $\sim$ сохраняет операцию суперпозиции. Действительно, пусть для некоторой перестановки π

$$g_1(x_1,\ldots,x_n) = \pi^{-1}(f_1(\pi_1(x_1),\ldots,\pi(x_n)))$$

$$g_2(x_1,\ldots,x_m) = \pi^{-1}(f_2(\pi_1(x_1),\ldots,\pi(x_m)))$$

Распишем выражение

$$
\begin{aligned}
&g_1(g_2(x_1,\dots,x_m),x_{m+1},\dots,x_{m+n-1}) = \\
&\qquad = \pi^{-1}(f_1(\pi\pi^{-1}(f_2(\pi(x_1),\dots,\pi(x_m))),\pi(x_{m+1}),\dots,\pi(x_{m+n-1}))) = \\
&\qquad\qquad = \pi^{-1}(f_1(f_2(\pi(x_1),\dots,\pi(x_m)),\pi(x_{m+1}),\dots,\pi(x_{m+n-1}))),
\end{aligned}
$$

откуда получаем

$$g_1(g_2(x_1,\dots,x_m),x_{m+1},\dots,x_{m+n-1}) \sim f_1(f_2(x_1,\dots,x_m),x_{m+1},\dots,x_{m+n-1}).$$

■

Перед тем как перейти к следующей главе, докажем теорему.

Теорема 2.8. *Пусть $h\colon E_k \to E_l, k > l \geq 2$ такая, что $\forall\, x \in E_l\colon h(x) = x$. Функция $g\colon E_l^n \to E_l$ порождает м.с.з.к., тогда и только тогда, когда функция $f(x_1,\dots,x_n) = g(h(x_1),\dots,h(x_n))$ порождает м.с.з.к.*

□ Пусть $f_0(x_1,\dots,x_m) \in [f]$, тогда, согласно определению замыкания, f_0 реализуется некоторой формулой над f: $f_0 = F_0(f)$. Докажем, что

$$f_0(x_1,\dots,x_m) = F_0(g)[h(x_1)/x_1,\dots,h(x_m)/x_m],$$

где $F_0(g)$ обозначает формулу над g с тем же строением, что и формула $F_0(f)$, а

$$[h(x_1)/x_1,\dots,h(x_m)/x_m]$$

— замена всех переменных x_i формулы на $h(x_i)$.

Доказательство проведём индукцией по функциональной сложности формулы F_0. Если она имеет вид $f(x_{i_1},\dots,x_{i_n})$, то

$$F_0(f) = f(x_{i_1},\dots,x_{i_n}) = g(h(x_{i_1}),\dots,h(x_{i_n})) = g[h(x_{i_1})/x_{i_1},\dots,h(x_{i_n})/x_{i_n}].$$

Пусть $\widetilde{l}(F_0) = p$ и для всех формул F таких, что $\widetilde{l}(F) < p$, утверждение доказано. Воспользовавшись также тем, что $\forall\, g_0 \in [g]\colon h(g_0) = g_0$, распишем

$$
\begin{aligned}
F_0(f) &= f(F_1(f),\dots,F_n(f)) = g(h(F_1(f)),\dots,h(F_n(f))) \\
&= g(h(F_1(g)),\dots,h(F_n(g)))[h(x_1)/x_1,\dots,h(x_m)/x_m] \\
&= g(F_1(g),\dots,F_n(g))[h(x_1)/x_1,\dots,h(x_m)/x_m] \\
&= F_0(g)[h(x_1)/x_1,\dots,h(x_m)/x_m].
\end{aligned}
$$

Утверждение доказано.

Обозначим $t_0(g) = g_0$. Докажем, что f_0 и g_0 имеют одинаковые существенные переменные. Действительно, пусть $x_i, i = 1,\dots,m$ — существенная переменная функции f_0. По определению это означает, что существуют такие $b_1,\dots,b_{i-1},b_{i+1},\dots,b_m,b_i',b_i'' \in E_k$, что

$$f_0(b_1,\dots,b_i',\dots,b_m) \neq f_0(b_1,\dots,b_i'',\dots,b_m).$$

Тогда

$$g_0(h(b_1),\dots,h(b_i'),\dots,h(b_m)) \neq g_0(h(b_1),\dots,h(b_i''),\dots,h(b_m)),$$

что доказывает существенность переменной x_i для функции g_0. Докажем в обратную сторону. Пусть x_i — существенная переменная функции g_0. Тогда имеем

$$g_0(b_1,\dots,b_i',\dots,b_m) \neq g_0(b_1,\dots,b_i'',\dots,b_m).$$

Или, что то же самое

$$g_0(h(b_1), \ldots, h(b_i'), \ldots, h(b_m)) \neq g_0(h(b_1), \ldots, h(b_i''), \ldots, h(b_m)),$$

откуда по определению имеем

$$f_0(b_1, \ldots, b_i', \ldots, b_m) \neq f_0(b_1, \ldots, b_i'', \ldots, b_m).$$

Перейдем к доказательству теоремы. Сначала необходимость. Предположим, g порождает *м.с.з.к.*, а f — нет. Тогда найдется существенная функция $f_0 \in [f]$ такая, что $f \notin [f_0]$. По доказанному выше утверждению имеем

$$f_0(x_1, \ldots, x_m) = F_0(g)[h(x_1)/x_1, \ldots, h(x_m)/x_m] = g_0[h(x_1)/x_1, \ldots, h(x_m)/x_m].$$

Функция $g_0 \in [g]$ существенная, поэтому $g \in [g_0]$, то есть $g = F_1(g_0)$. Подставим в F_1 функцию f_0 и посмотрим, что получится

$$\begin{aligned} F_1(f_0) &= F_1(F_0(g)[h(x_1)/x_1, \ldots, h(x_m)/x_m]) \\ &= F_1(g_0)[h(x_1)/x_1, \ldots, h(x_m)/x_m] \\ &= g[h(x_1)/x_1, \ldots, h(x_m)/x_m] \\ &= f. \end{aligned}$$

Приходим к противоречию с тем, что $f \notin [f_0]$.

Теперь докажем достаточность. Предположим, f порождает *м.с.з.к.*, а g — нет. Тогда найдется существенная функция $g_0(x_1, \ldots, x_m)$ такая, что $g \notin [g_0]$. Пусть $g_0 = F_0(g)$. Применим к левой и правой части подстановку

$$[h(x_1)/x_1, \ldots, h(x_m)/x_m],$$

и получим

$$g_0[h(x_1)/x_1, \ldots, h(x_m)/x_m] = F_0(g)[h(x_1)/x_1, \ldots, h(x_m)/x_m] = F_0(f) = f_0(x_1, \ldots, x_m).$$

Функция f_0 — существенная, поэтому $f = F_1(f_0)$. Подставим в F_1 функцию g_0, применим ту же подстановку и распишем

$$F_1(g_0)[h(x_1)/x_1, \ldots, h(x_m)/x_m] = F_1(f_0) = f = g[h(x_1)/x_1, \ldots, h(x_m)/x_m].$$

Так как при всех $x \in E_l$ имеем $h(x) = x$, получаем, что $F_1(g_0) = g$. Приходим к противоречию с тем, что $g \notin [g_0]$. ■

3. Поиск *м.с.з.к.* в P_3 на ЭВМ

Согласно лемме 2.1 для случая $k = 3$, любой *м.с.з.к.* в P_3 содержит функцию существенно зависящую от двух или трех переменных. Рассмотрим сначала

3.1. Случай двух переменных

Используя леммы 2.5 и 2.7 в качестве оптимизирующих, при помощи ЭВМ была решена следующая задача.

Задача 3.1. *Найти все функции $f(x,y) \in P_3$, такие, что для любой существенной функции $g \in [f] \cap P_3^2$ верно*

$$[g] \cap P_3^2 = [f] \cap P_3^2.$$

Согласно утверждению леммы 2.2, функции от двух переменных, порождающие *м.с.з.к.*, содержатся только среди найденных функций в задаче 3.1. Кроме того необходимо отметить, что каждая представленная функция представляет целый класс эквивалентности, задаваемый отношением $\sim$.

Удобно рассмотреть отдельно два случая.

3.1.1. Функция принимает два значения

Пусть оказалось, что найденная функция f принимает только два значения. Так как мы рассматриваем функции с точности до отношения $\sim$, всегда можно выбрать эквивалентную функцию f_0, принимающую значения из $E_2 \subset E_3$. Именно такую функцию и будем рассматривать в качестве представителя класса.

Зададим три функции $h_i(x) : E_3 \to E_2$, через которые удобно будет выразить найденные функции.

x	$h_1(x)$	$h_2(x)$	$h_3(x)$
0	0	0	0
1	1	0	1
2	0	1	1

Итак, найдены следующие функции, принимающие только два значения.

$f_1(x,y) = h_1(x) \vee h_1(y)$

$f_2(x,y) = h_1(x) \wedge h_1(y)$

$f_3(x,y) = h_2(x) \vee h_2(y)$

$f_4(x,y) = h_2(x) \wedge h_2(y)$

$f_5(x,y) = h_1(x) + h_1(y)$

$f_6(x,y) = h_2(x) + h_2(y)$

$f_7(x,y) = h_3(x) + h_3(y)$

$f_8(x,y) = h_1(x) \wedge h_2(y)$

$f_9(x,y) = h_1(x) \wedge \neg h_2(y)$

$f_{10}(x,y) = h_1(y) + h_2(y) \wedge h_1(x)$

Для каждой найденной функции необходимо выяснить порождает ли она *м.с.з.к.*

Известно, что функции $\vee$ и $\wedge$ порождают *м.с.з.к.* в P_2, а функция $+$ — нет. Поэтому, воспользовавшись теоремой 2.8, можно утверждать, что функции f_1 и f_2 порождают *м.с.з.к.*, а f_5 и f_7 — нет.

Лемма 3.1. *Функция $f_3(x,y)$ порождает м.с.з.к.*

□ Рассмотрим произвольную формулу F над f_3

$$F(f_3) = f_3(F_1, F_2),$$

где F_1 и F_2 либо формулы над f_3, либо переменные. Если и F_1 и F_2 переменные, то получим либо f_3, либо функцию одной переменной. Пусть хотя бы одна из F_i, например, пусть F_1 — формула над f_3. Распишем

$$F(f_3) = f_3(f_3(F_{1,1}, F_{1,2}), F_2) = h_2(f_3(F_{1,1}, F_{1,2})) \vee h_2(F_2) = 0 \vee h_2(F_2) = h_2(F_2).$$

Если F_2 — формула над f_3, то $h_2(F_2) = 0$, если F_2 — переменная, то $h_2(F_2)$ — функция одной переменной. Таким образом мы доказали, что любая формула над f_3 реализует либо саму f_3, либо константу, либо функцию одной переменной. Поэтому $[f_3]$ стоит из одной существенной функции — самой f_3. Стало быть, $[f_3]$ — *м.с.з.к.* ■

Лемма 3.2. *Функции $f_4(x, y)$ и $f_6(x, y)$ порождают м.с.з.к. в P_3.*

□ Доказательство аналогично лемме 3.1.1. ■

Лемма 3.3. *Функция f_{10} порождает м.с.з.к. в P_3.*

□ Сначала докажем, что любая функция из $[f_{10}]$ имеет следующий вид

$$g_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} h_1(x_i)(\prod_{j=1}^{i-1} h_2(x_j)). \qquad (*)$$

Доказательство проведем индукцией по построению формулы над f_{10}. Сначала заметим, что сама $f_{10}(x, y) = g_2(x, y)$, а $f_{10}(x, x) = h_1(x) = g_1(x)$. Допустим, что для всех функций, которые реализуются формулами функциональной сложности $< r$, утверждение доказано. Рассмотрим формулу $F(f_{10})$, такую, что $\widetilde{l}(F) = r$. Она имеет вид

$$F(f_{10}) = f_{10}(F_1, F_2) = h_1(F_2) + h_2(F_2) \wedge h_1(F_1),$$

где F_1 и F_2 — либо переменные, либо формулы над f_{10}. Если F_2 — формула над f_{10}, то получим

$$F(f_{10}) = F_2 + 0 \wedge h_1(F_1) = F_2.$$

Функциональная сложность формулы F_2 строго меньше r, поэтому по предположению индукции F имеет вид $(*)$.

Теперь рассмотрим случай, когда F_2 — переменная. Тогда, если F_1 тоже переменная, то $F(f_{10})$, либо совпадет с $f_{10}(x, y)$, либо — с $f(x, x) = h_1(x)$. То есть снова имеет вид $(*)$.

Последний случай. F_2 — переменная, а F_1 — формула над f_{10}.

$$F(f_{10}) = h_1(F_2) + h_2(F_2) \wedge F_1$$

По предположению индукции F_1 имеет вид $(*)$. Пусть тогда $F_2 = x_1$, а $F_1 = g_n(x_2, \ldots, x_{n+1})$. Подставим F_1 и F_2

$$\begin{aligned}
F(f_{10}) &= h_1(x_1) + h_2(x_1) \wedge g_n(x_2, \ldots, x_{n+1}) = \\
&= h_1(x_1) + h_2(x_1) \sum_{i=2}^{n+1} h_1(x_i)(\prod_{j=2}^{i-1} h_2(x_j)) = \\
&= h_1(x_1) + \sum_{i=2}^{n+1} h_1(x_i)(\prod_{j=1}^{i-1} h_2(x_j)) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} h_1(x_i)(\prod_{j=1}^{i-1} h_2(x_j)) \\
&= g_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}).
\end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Покажем, что из любой функции вида (∗) можно вывести f_{10}. Действительно, для любой g_n, при $n \geq 3$ имеем

$$
\begin{aligned}
g_n(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^{n} h_1(x_i)(\prod_{j=1}^{i-1} h_2(x_j)) \\
&= h_1(x_1) + h_2(x_1)h_1(x_2) + h_2(x_1)h_2(x_2) \sum_{i=3}^{n} h_1(x_i)(\prod_{j=3}^{i-1} h_2(x_j)).
\end{aligned}
$$

Отождествим все x_i при $i \geq 3$ и воспользуемся тем, что $h_2(x) \wedge h_1(x) = 0$. Получим

$$
\begin{aligned}
&g_n(x, y, x_3 \dots, x_3) = \\
&\qquad = h_1(x) + h_2(x)h_1(y) + h_2(x)h_2(y) \sum_{i=3}^{n} h_1(x_3)(\prod_{j=3}^{i-1} h_2(x_3)) = \\
&\qquad = h_1(x) + h_2(x)h_1(y) = \\
&\qquad = g_2(x, y) = \\
&\qquad = f_{10}(x, y).
\end{aligned}
$$

■

3.1.2. Функция принимает три значения

Так как найденные функции принимают все три значения, то представить их в удобной форме как это было проделано в предыдущем разделе, не представляется возможным.

x	y	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}	f_{17}	f_{18}	f_{19}	f_{20}	f_{21}	f_{22}	f_{23}	f_{24}	f_{25}	f_{26}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1	0	1	2	1	0	1	0	1	1	0	0
2	0	0	0	0	0	2	0	2	1	2	0	0	2	2	2	2	2
0	1	0	0	2	0	0	1	0	2	0	0	0	0	0	1	1	0
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	0	0	1	2	0	2	1	1	1	1	1	2	1
0	2	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	2
1	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
2	2	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Для того, чтобы выяснить какие из найденных функций порождают *м.с.з.к.* достаточно будет воспользоваться леммой 2.3, используя алгоритм из задачи 2.2. Проделав это оказалось, что порождают *м.с.з.к.* все функции кроме f_{15} и f_{25}.

3.2. Случай трех переменных

Нас будут интересовать такие $f(x, y, z) \in P_3$, что $[f]$ — *м.с.з.к.* При этом $[f]$ не содержит функций g, существенно зависящих от двух переменных. Потому что, в таком случае $[f] = [g]$, откуда следует, что такой *м.с.з.к.* был уже рассмотрен в разделе 3.1. Тогда, в частности, отождествлением переменных из функции $f(x, y, z)$ нельзя получить функцию существенно зависящую от двух переменных. Воспользуемся этим условием с тем, чтобы снизить число рассматриваемых функций.

Пусть отождествление каких-то двух переменных дало константу c. Тогда отождествление любых двух переменных функции $f(x, y, z)$ так же даст константу c. Иначе с одной стороны $f(x, x, x) \equiv c$, а с другой $f(x, x, x)$ — существенно зависит от x. Теперь подставим c в f вместо переменной x. Получившаяся функция $g(y,z) = f(c,y,z)$ принадлежит $[f]$, потому что $c \in [f]$. Поэтому g зависит существенным образом не более, чем от одной переменной. Отождествляя y и z снова получим константу c. Откуда получаем, что $g(y,z) = c$. Аналогично рассуждение проводится для случая, когда c подставляется в f вместо переменной y и z.

Итак, мы получили, что отождествление любых двух переменных в $f(x,y,z)$ дает некоторую константу c и подстановка этой константы в любой из аргументов так же дает константу c. Нетрудно видеть, что для любого набора $(x,y,z) \in E_3^3$ либо какие-то две компоненты совпадают, либо в наборе встречаются все элементы из E_3. Отсюда получаем $f(x,y,z) \equiv c$. Замыкание таких функций не может являться *м.с.з.к.*, так как сами функции не являются существенными.

Остается случай, когда отождествление любых двух переменных дает некоторую функцию φ, существенно зависящую от одной переменной. Функция φ не зависит от выбора отождествляемых переменных, потому что отождествив все переменные, получим $f(x,x,x) = \varphi(x)$. В таблице ниже указаны восемь случаев того, какой вид может иметь функция f.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	IIX
$f(x,x,y) =$	$\varphi(x)$	$\varphi(y)$	$\varphi(y)$	$\varphi(y)$	$\varphi(x)$	$\varphi(y)$	$\varphi(x)$	$\varphi(x)$
$f(x,y,x) =$	$\varphi(x)$	$\varphi(x)$	$\varphi(y)$	$\varphi(y)$	$\varphi(x)$	$\varphi(x)$	$\varphi(y)$	$\varphi(y)$
$f(y,x,x) =$	$\varphi(x)$	$\varphi(x)$	$\varphi(x)$	$\varphi(y)$	$\varphi(y)$	$\varphi(y)$	$\varphi(y)$	$\varphi(x)$

Обратим внимание на то, что для любой функции типа II сущестует соответствующая ей функция типа V, получающаяся из исходной перестановкой переменных. Применив это соображение к другим парам типов функции f, можно сузить число типов до четырех, как это представлено в следующей таблице.

Тип f	I	II	III	IV
$f(x,x,y) =$	$\varphi(x)$	$\varphi(y)$	$\varphi(y)$	$\varphi(y)$
$f(x,y,x) =$	$\varphi(x)$	$\varphi(x)$	$\varphi(y)$	$\varphi(y)$
$f(y,x,x) =$	$\varphi(x)$	$\varphi(x)$	$\varphi(x)$	$\varphi(y)$

Каждая функция зависит от выбора типа из таблицы выше, задания функции φ и значений на шести наборах попарно неравных переменных. Таким образом, если общее число функций от трех переменных равно 3^{27}, то число рассматриваемых функций удалось снизить до $4 * 3^3 * 3^6 = 4 * 3^9$.

Итак, были найдены следующие функции.

Тип f	I	I	I	I	I	I	I	I	I
$\varphi(0)$	0	0	0	0	0	1	0	2	0
$\varphi(1)$	1	0	1	1	1	1	1	1	2
$\varphi(2)$	0	2	2	1	2	2	2	2	2
$f(0,1,2)$	0	0	0	1	1	1	2	2	2
$f(0,2,1)$	0	0	0	1	1	1	2	2	2
$f(1,0,2)$	0	0	0	1	1	1	2	2	2
$f(1,2,0)$	0	0	0	1	1	1	2	2	2
$f(2,0,1)$	0	0	0	1	1	1	2	2	2
$f(2,1,0)$	0	0	0	1	1	1	2	2	2

Тип f	II	II	II	II	II	II	II	II	II	II	II	II
$\varphi(0)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\varphi(1)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\varphi(2)$	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
$f(0,1,2)$	0	0	2	0	2	0	0	0	1	1	2	0
$f(0,2,1)$	0	0	1	0	2	0	0	0	1	0	0	0
$f(1,0,2)$	1	2	1	1	1	1	2	0	0	1	1	2
$f(1,2,0)$	1	0	1	1	1	1	2	0	0	1	1	1
$f(2,0,1)$	1	2	2	0	0	1	1	2	2	2	2	2
$f(2,1,0)$	0	2	2	0	0	1	1	2	2	2	2	2

Тип f	IV	IV	IV	IV	IV	IV
$\varphi(0)$	0	0	0	2	0	1
$\varphi(1)$	1	2	1	1	0	1
$\varphi(2)$	1	2	0	2	2	2
$f(0,1,2)$	0	0	1	1	2	2
$f(0,2,1)$	0	0	1	1	2	2
$f(1,0,2)$	0	0	1	1	2	2
$f(1,2,0)$	0	0	1	1	2	2
$f(2,0,1)$	0	0	1	1	2	2
$f(2,1,0)$	0	0	1	1	2	2

Функций типа III, для которых выполнено условие леммы 2.2, не обнаружено. Для каждой из найденных функций выполнено утверждение леммы 2.3, поэтому можно утверждать, что все они порождают *м.с.з.к.*